SUITES

I. Rappels

• VARIATIONS

- Si $u_{N+1} \geqslant u_N$ → u_N est croissante
- Si $u_{n+1} \leqslant u_N$ → u_N est décroissante
- Si $u_{N+1} = u_N$ → u_N est constante
- Sinon u_N est monotone

• COMMENT TROUVER LA VARIATION D'UNE SUITE ?

① Soit on fait $u_{n+1} - u_N$ et on étudie le signe de la difference

② Soit u_N s'apparente à 1 fonction et on étudie le signe de la dérivée.

③ Soit on fait $\boxed{\frac{u_{N+1}}{u_N}}$ et on compare par rapport à 1.

(si $\frac{u_{N+1}}{u_N} > 1$, alors $u_{N+1} > u_N$ donc u_N croissante...)

• SUITES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

- Si $u_N \leq M$ (M = réel) alors u_N est Majorée
- Si $u_N \geqslant m$ (m = réel) alors u_N est minorée
- Si $m \leqslant u_N \leqslant M$ alors u_N est bornée

Théorème de convergence des suites monotones :

toute suite strictement décroissante et minorée CONVERGE

toute suite strictement croissante et majorée CONVERGE

II. Suites arithmétiques et géométriques

	S. ARITHMETIQUES	S. GEOMETRIQUES
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p) \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme	nb de termes $\times \left(\dfrac{\text{1er terme + dernier terme}}{2}\right)$	$(\text{1er terme}) \times \left(\dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}\right)$

⚠ **Méthode pour prouver qu'1 suite est géométrique** (à partir d'1 ex).

On sait que $u_{n+1} = 0{,}8u_N + 50$. et que $v_N = u_N - 250$ et $u_0 = 1500$
Prouver que v_N est géométrique.

- $v_N = u_N - 250$

donc $v_{N+1} = u_{N+1} - 250$

$v_{N+1} = 0{,}8u_N + 50 - 250 = 0{,}8u_N - 200 = 0{,}8\left(u_N - \frac{200}{0{,}8}\right) = 0{,}8(v_N - 250)$

$v_{N+1} = 0{,}8 \times v_N$ donc v_N est 1 suite géométrique de raison $q = 0{,}8$

- $v_N = v_0 \times q^n$ or $v_0 = u_0 - 250 = 1500 - 250 = 1250$

Donc $\underline{v_N = 1250 \times 0{,}8^n}$

- $v_N = u_N - 250 \iff u_N = v_N + 250 \iff u_n = 1250 \times 0{,}8^n + 250.$

III. Démonstration par récurrence

NOTIONS À CONNAÎTRE

① Initialisation : vérifier que P_{n_0} est vraie

② Hypothèse de récurrence et hérédité : démontrer que P_{k+1} est vraie

③ Conclusion : pour tout $n > n_0$, P_n est vraie

METHODE AVEC EXERCICE CORRIGÉ

On considère P_n, la propriété suivante :

$$1+3+5+7+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$$

Démontrons cette propriété par récurrence :

① Initialisation : pour $n=0$, on a $1 = (0+1)^2$
$1 = 1$ ce qui est vrai

② Hérédité : supposons que pour k entier naturel P_k est vraie
on a alors :

$$1+3+5+7\dots+(2k+1) = (k+1)^2$$

Au rang $k+1$ on a d'un côté $\underbrace{1+3+5+7+\dots+(2k+1)}+(2(k+1)+1)$

$= \underbrace{1+3+5+7+\dots+(2k+1)}+(2k+3)$

$= (k+1)^2 + (2k+3)$

$= k^2+2k+1+2k+3$
$= k^2+4k+4$
$= (k+2)^2$

et de l'autre au rang $k+1$ $(k+1+1)^2 = (k+2)^2$

On a bien prouvé que P_{k+1} est vraie

③ Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n.

IV. Limites d'une suite

CONVERGENCE ET DIVERGENCE

- Si $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ → la suite converge
- Si $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty}$ → la suite diverge

SUITES MONOTONES

- Si u_n croissante ⊕ non majorée → $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si u_n décroissante ⊕ non minorée → $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

RAPPELS : une suite croissante et majorée est convergente
une suite décroissante et minorée est convergente

LIMITES DE RÉFÉRENCE

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0}$

F.I : $-\infty + \infty$ $\quad 0 \times \infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$

THEOREMES

- Théorème de comparaison

si $\begin{cases} v_n \geq u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

si $\begin{cases} v_n \leq u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

- Théorème des gendarmes

Si pour tout $n \geq n_0$ $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim w_n = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$