EQUATIONS DIFF.

• Equation de type : $\boxed{y' = ay}$

Solution → $\boxed{y(x) = Ce^{ax}}$

Ex : $y' = 3y$ avec $y(0) = 2$

$y' = 3y$ donc $y(x) = Ce^{3x}$

de plus $y(0) = 2$ donc $2 = C \times e^{3\times 0} \iff 2 = C \times e^{0} \iff 2 = C$

ainsi $\underline{y(x) = 2e^{3x}}$

• Equation de type : $\boxed{y' = ay + b}$

Solution → $\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

Ex : $y' = -2y + 3$ avec $y(0) = -1$

$y' = -2y + 3$ donc $y(x) = Ce^{-2x} - \frac{2}{3}$

de plus $y(0) = 1$ donc $1 = Ce^{-2\times 0} - \frac{2}{3} \iff 1 = C - \frac{2}{3} \iff C = \frac{5}{3}$

ainsi $\underline{y(x) = \frac{5}{3}e^{-2x} - \frac{2}{3}}$

• Equation de type : $\boxed{y' = ay + f}$

Solution → $\boxed{y(x) = Ce^{ax} + u(x)}$ $u(x)$: solut° particulière de l'équat° diff.

Exercices-types + corrigés

Soit $(E) \Rightarrow y' - 2y = e^x$ et $E_0 \Rightarrow y' - 2y = 0$

① Vérifier que $u_0(x) = -e^x$ est solution de (E)

$u_0' = -e^x$

$u_0' - 2u_0 = -e^x - (2e^x) = -e^x + 2e^x = e^x$

Donc $u_0(x)$ est bien solu° de (E)

② Résoudre l'équation différentielle (E_0)

$y' - 2y = 0$

$y' = 2y$

$y(x) = Ce^{ax}$ $y(x) = Ce^{2x}$

③ Montrer que $u - u_0$ est solution de E_0

$(u-u_0)' = u' - u_0' = u' + e^x$

$E_0 \rightarrow y' - 2y = (u' + e^x) - 2(u + e^x) = u' + \cancel{e^x} - 2u - \cancel{e^x}$
$= u' - 2u$

Donc $u - u_0$ est bien une solu°

④ En déduire les solutions de (E)

$y' - 2y = e^x$ donc $y' = e^x + 2y$

$y = Ce^{ax} + u(x)$

$y = Ce^{2x} - e^x$

⑤ Déterminer la solution de f de (E) pour $f(0) = 1$

$y = Ce^{2x} - e^x$ avec $f(0) = 1$

$1 = Ce^0 - e^0$

$1 = C - 1 \Leftrightarrow C = 2$

Donc $y = 2e^{2x} - e^x$